

1. zadaća iz numeričke matematike

1. Konstruirajte interpolacijski polinom koji zadovoljava slijedeće uvjete:

$$p(1) = p'(1) = 1, p''(1) = 2, p(2) = 3, p'(2) = 4, p''(2) = 8.$$

2. Odredite sve $t \in \mathbb{R}$ za koje je interpolacijski polinom kroz točke $(t, -1)$, $(-1, t)$ i $(1, -4)$ stupnja jedan. Za svaki dobiveni t konstruirajte pripadni interpolacijski polinom.

3. Konstruirajte interpolacijski polinom koji zadovoljava slijedeće uvjete:

$$p(-1) = 1, p(1) = -1, p(2) = 1, p'(2) = 6, p''(2) = 4.$$

4. Funkciju $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ zadanu formulom

$$f(x) := xe^{-x^2}$$

aproksimiramo linearnim splineom p_n na ekvidistantnoj mreži s $n + 1$ čvorom na tom segmentu. Označimo s n_ε najmanji $n \in \mathbb{N}$ takav da ocjena uniformne pogreške aproksimacije splineom p_n ne prelazi $\varepsilon := 10^{-4}$. Odredite n_ε i izračunajte $p_{n_\varepsilon}(1.8)$.

5. Funkciju $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zadanu formulom

$$f(x) := \operatorname{arctg} x$$

interpoliramo nizom polinoma $(p_n)_{n \geq 0}$, pri čemu je $p_n \in \mathcal{P}_n$ polinom na ekvidistantnoj mreži s $n + 1$ čvorom. Ispitajte da li niz polinoma $(p_n)_{n \geq 0}$ uniformno konvergira prema funkciji f .

6. Funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ aproksimiramo po djelovima linearnom interpolacijom na intervalu $[1, 10]$. Fiksiramo traženu točnost $\varepsilon = 0.001$ koju zahtijevamo na cijelom intervalu. Odredite broj čvorova potrebnih da se zadana točnost postigne uz ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu. Nadalje, odredite mrežu uz koju se zadana točnost može postići sa duplo manje čvorova.